第 6 日

重積分の変数変換

6 月 6 日に雨ざーざー降ってきて
——某コック

1 変数の定積分では，置換積分によって変数を変換することで計算を楽にできた。では 2 変数だとどうか。

問題 6.1

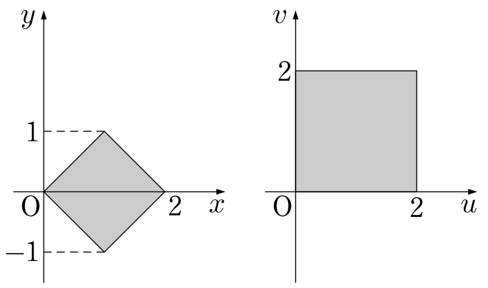
つぎの積分の値を計算せよ。

$$\iint_D (x-y)e^{x+y}\,dx\,dy$$
$$D : 0 \leqq x+y \leqq 2,\ 0 \leqq x-y \leqq 2$$

直接計算してもよいが，$x+y=u$，$x-y=v$ とおいたほうが計算しやすそうだ。D に変わる新しい領域 E は $0 \leqq u \leqq 2$，$0 \leqq v \leqq 2$ の正方形になる。このとき積分は

$$\iint_E ve^u\,du\,dv$$

となるが，このままでは元の積分の値と等しくない。なぜなら，古い領域 D（下図左）と新しい領域 E（下図右）とでは面積が異なっているからだ。



D 上の点と E 上の点とは 1 対 1 対応するものの，E は D の 2 倍ある。よって面積の帳尻あわせをした

$$\iint_D (x-y)e^{x+y}\,dx\,dy = \iint_E ve^u\,\frac{1}{2}\,du\,dv$$

が正しい変数変換である。

いまの変数変換でキモとなるのは

$$dx\,dy = （面積比）\times du\,dv$$

という部分だったが，もっと複雑な変数変換では面積比が出せるだろうか。実はそれが出せ，

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

となる[1]。J はヤコビアンと呼ばれる。

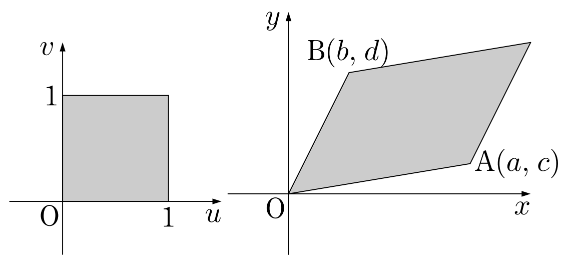
行列式が面積比を表わすとは，いったいどういうことだろう。たとえば $(u,v)=[0,1]\times[0,1]$ でできた下図左の正方形（面積は 1）に

$$x = au+bv$$
$$y = cu+dv$$

という 1 次変換を施すと，面積はどう変化するだろうか。(u,v) に $(1,0), (0,1)$ の座標を代入すると，

$$\mathrm{A} = (a\cdot 1+b\cdot 0,\ c\cdot 1+d\cdot 0) = (a,c)$$
$$\mathrm{B} = (a\cdot 0+b\cdot 1,\ c\cdot 0+d\cdot 1) = (b,d)$$

となるから，下図右のような平行四辺形に変形される。



この面積は高校で学んだとおり，

$$S = \mathrm{abs}\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \mathrm{abs}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |ad-bc|$$

となるのだった[2]。

[1] det は行列式を意味する。

[2] abs は絶対値を意味する。$|\cdot|$ が行列式になったり絶対値になったりするが，文脈で判断してほしい。絶対値がつくのは行列式が負にもなりうるから。ちなみに 1/2 をかけると三角形 OAB の面積。

さて，$x=\phi_1(u,v)$，$y=\phi_2(u,v)$ で変数変換したとする。このとき全微分から

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv \end{aligned}$$

が得られる。微分が 1 次近似であることを考えれば，この場合の $dx\,dy$ と $du\,dv$ との微小な面積比は先から類推できるだろう。すなわち行列式で

$$\mathrm{abs}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \mathrm{abs}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} (= |J|)$$

となるはずで，

$$\begin{aligned} & du\,dv : dx\,dy = 1 : |J| \\ \Longleftrightarrow\ & dx\,dy = |J|\,du\,dv \end{aligned}$$

である。つまりヤコビアンとは微小面積比のことだ[3]。

では，**問題** 6.1 をヤコビアンを使って求めてみよう。$x+y=u$，$x-y=v$ とおくと

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad y = \frac{u-v}{2}$$

から，ヤコビアンは

$$|J| = \mathrm{abs}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

で先の値と一致した。ついでに積分計算しておくと，

$$\begin{aligned} I &= \iint_E ve^u\,\frac{1}{2}\,du\,dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 v\left\{\int_0^2 e^u\,du\right\}dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 v\left[e^u\right]_0^2 dv \\ &= \frac{1}{2}(e^2-1)\int_0^2 v\,dv \\ &= \frac{1}{2}(e^2-1)\frac{1}{2}\left[v^2\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^2-1)\cdot 4 \\ &= e^2-1. \end{aligned}$$

[3] このことをきっちりと証明するのは骨が折れる。なお，ヤコビアンの x,y と u,v との並びのうちどちらが縦だったかと悩む必要はない。行列式なのだから結果は同じだ。

変数変換の中でも最も著名なのは極座標変換

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

だろう（$r \geqq 0$）。このときのヤコビアンは

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos\theta & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r\sin\theta \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin\theta & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r\cos\theta \end{aligned}$$

から

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

となり，まことに都合がよい。要約すると，

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

問題 6.2

つぎの積分の値を計算せよ。

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy \qquad D: x^2+y^2 \leqq 1$$

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とおく。領域 D は原点中心で半径 1 の円の内部だから，(r,θ) の領域は

$$0 \leqq r \leqq 1, \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$$

で作られる長方形 E の内部。よって求める積分の値を I とすると

$$\begin{aligned} I &= \iint_E \sqrt{1-r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}\,r\,dr\,d\theta \\ &= \iint_E \sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1 r(1-r^2)^{1/2}\,dr\right\}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right)(-2r)(1-r^2)^{1/2}\right\}d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{1/2+1}(1-r^2)^{3/2}\right]_0^1 d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(-1)\,\theta = \frac{1}{3}\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

となる[4]。

[4] 4 行目から 5 行目にかけては，置換積分

$$\int \{f(x)\}^a f'(x)\,dx = \frac{1}{a+1}\{f(x)\}^{a+1} \quad (a \neq -1)$$

を用いた。疑わしければ右辺を微分して確かめればよい。